Introducción a las derivadas parciales

Qué es la derivada parcial, cómo la calculas y qué significa.

Google Classroom
Facebook Twitter
Correo electrónico

Antecedentes

- Derivadas (ordinarias)
- Funciones multivariables
- Gráficas de funciones multivariables

Qué vamos a construir

- Para una función multivariable, como $f(x, y) = x^2 y$, calcular las derivadas parciales se ve algo como esto:

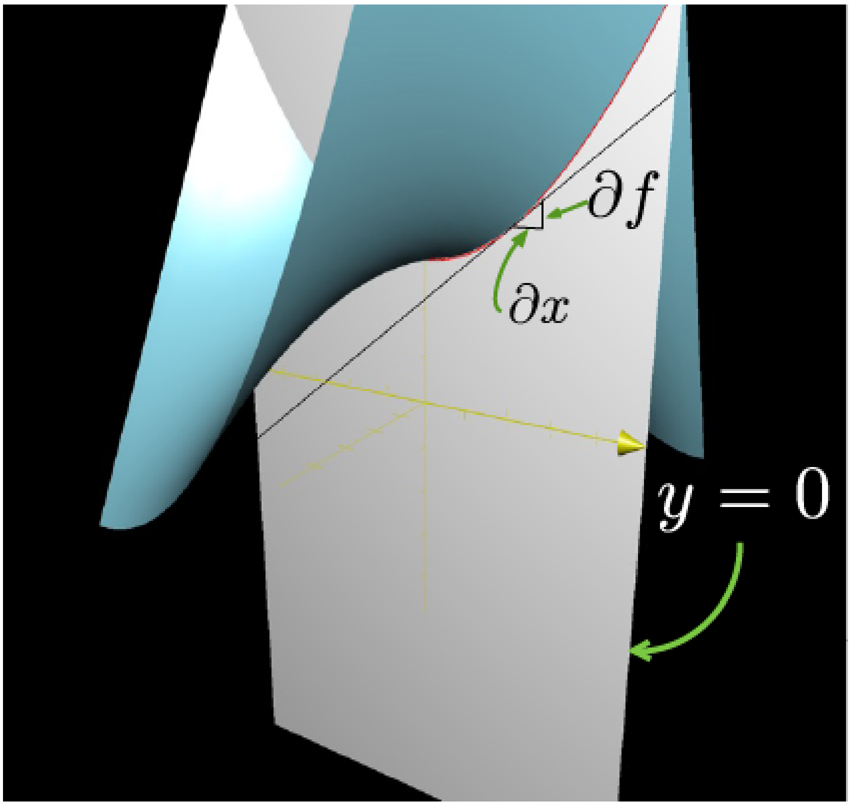
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} x^2 y}_{\substack{\text{Considera a } y \text{ como una constante;} \\ \text{saca la derivada.}}} = 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} x^2 y}_{\substack{\text{Considera a } x \text{ como una constante;} \\ \text{saca la derivada.}}} = x^2 \cdot 1$$

- El símbolo ∂ con forma de d se utiliza para distinguir las derivadas parciales de las derivadas de una variable. O debo decir... para diferenciarlas.

- La razón de definir un nuevo tipo de derivada es que cuando una función es multivariable, queremos ver cómo cambia la función *al mover una sola variable* mientras mantenemos fijas las demás.

- Con respecto a las gráficas tridimensionales, puedes ver la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ al rebanar la gráfica de f con un plano que representa un valor constante de y y medir la pendiente de la curva que resulta a lo largo del corte.



¿Qué es una derivada *parcial* ?

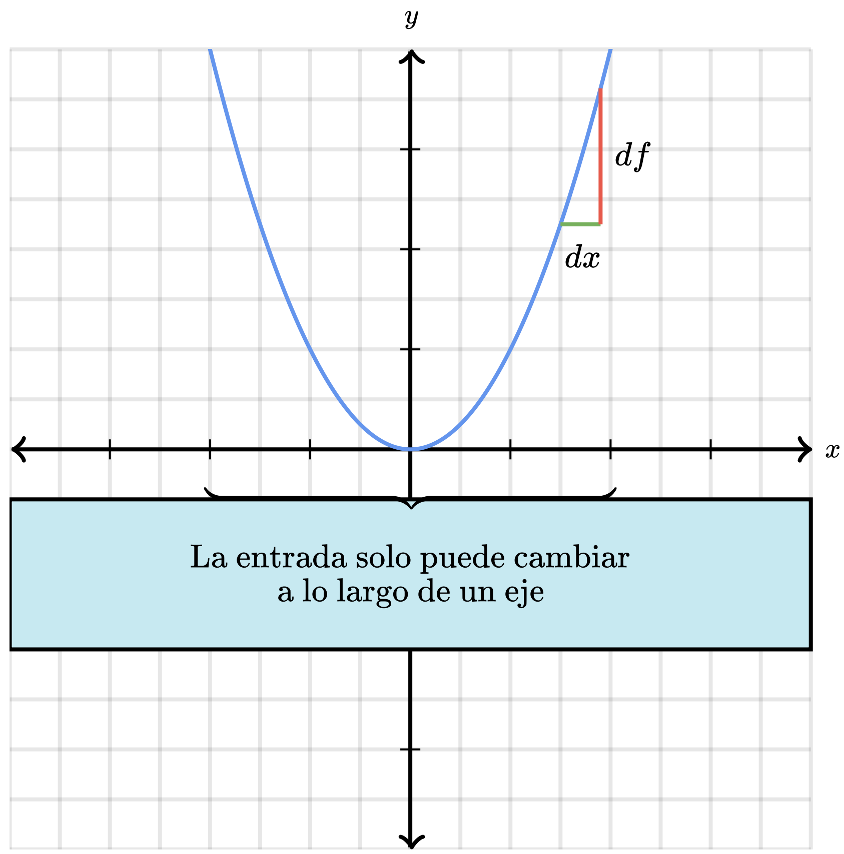
Vamos a suponer que estás familiarizado con la derivada ordinaria del cálculo de una sola variable, $\frac{df}{dx}$. Me gusta mucho esta notación para la derivada, porque la puedes interpretar como sigue:

- Interpreta dx como "un cambio muy pequeño en x".

- Interpreta "df" como "un cambio muy pequeño en el valor de salida de f", donde se entiende que este pequeño cambio es lo que sea que resulte de ese pequeño cambio dx en el valor de entrada.

De hecho, creo que esta idea intuitiva para el símbolo $\frac{df}{dx}$ es uno de los puntos más útiles del cálculo de una variable, y cuando realmente lo empieces a sentir en tus huesos, la mayoría de los conceptos alrededor de la derivada comienzan a tener mucho sentido.

Por ejemplo, cuando aplicas este concepto a la gráfica de f, puedes interpretar esta "razón" $\frac{df}{dx}$ como el desplazamiento vertical/horizontal de la gráfica de f, que depende del punto donde comenzaste.



¿Cómo funciona esto para funciones multivariables?

Considera una función con un valor de entrada bidimensional y una salida unidimensional.

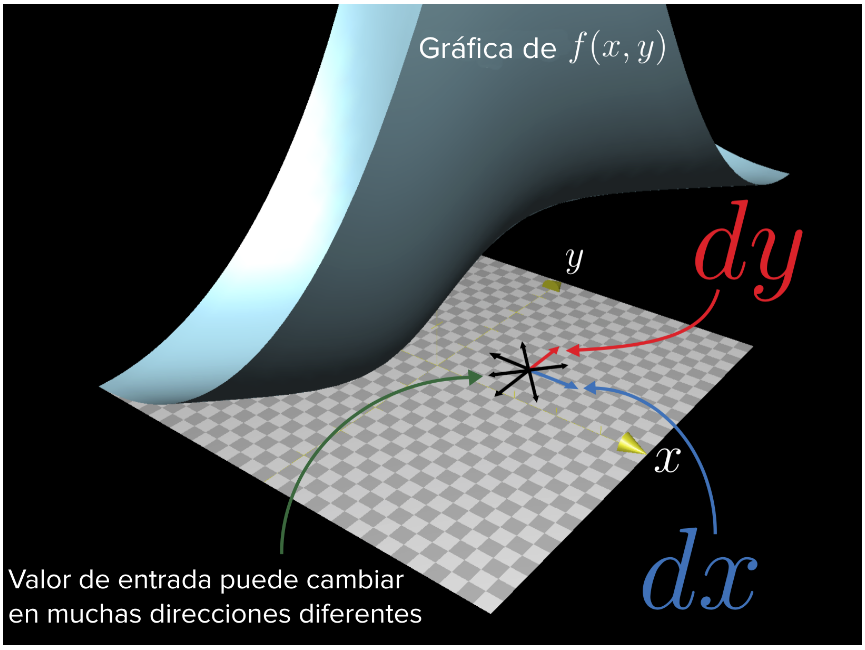
$$f(x, y) = x^2 - 2xy$$

Nada nos impide escribir la misma expresión, $\frac{df}{dx}$, e interpretarla de la misma manera:

- dx todavía representa un pequeño cambio en la variable x, que ahora solo es una componente de la entrada.

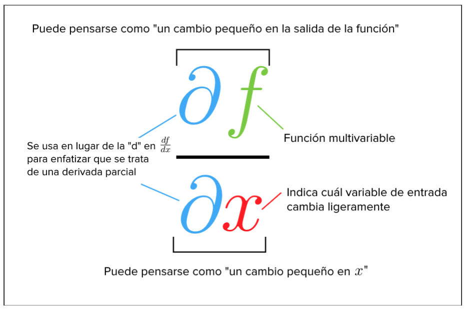
- df todavía representa el cambio resultante en el valor de salida de la función $f(x, y)$.

Sin embargo, esto ignora el hecho de que hay otra variable de entrada: y. El espacio de entrada ahora tiene varias dimensiones, así que podemos variar la entrada en otras direcciones además de x. Por ejemplo, ¿qué pasa si hacemos un pequeño cambio dy en y? Si volvemos a interpretar que df representa el pequeño cambio en el valor de salida de la función que ocasiona este pequeño cambio dy, tendremos una derivada diferente: $\frac{df}{dy}$.



Ninguna de estas derivadas por separado narra la historia completa de cómo cambia nuestra función $f(x, y)$ cuando sus entradas cambian un poco, así que las llamamos "**derivadas parciales**". Para enfatizar la diferencia, *ya no usamos la letra "d" para indicar los pequeños cambios, sino que introducimos el novedoso símbolo ∂*, para escribir cada derivada parcial como $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, etcétera.

El símbolo $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ se lee como "la derivada parcial de f con respecto a x".



Ejemplo: calcular una derivada parcial

Considera esta función:

$$f(x, y) = x^2y^3$$

Supón que te pido evaluar $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, la derivada parcial con respecto a x, en el valor de entrada $(3, 2)$.

> "¿Qué? ¡Pero todavía no he aprendido cómo hacer eso!"

No te preocupes, es casi la misma mecánica que para una derivada ordinaria.

De la introducción anterior, debes saber que se te está preguntando sobre la tasa a la cual cambia el valor de salida de f a medida que cambiamos un poco el valor de la componente x de la entrada, quizá moviéndola de $(3, 2)$ a $(3.01, 2)$.

Como solo nos importa el movimiento en la dirección x, podríamos tratar el valor y como una constante. De hecho, podemos sustituir $y = 2$ antes de calcular la derivada.

$$f(x, 2) = x^2(2)^3 = 8x^2$$

Ahora, la pregunta de cómo cambia f en respuesta a un pequeño desplazamiento en x es una derivada ordinaria de una sola variable.

Verificación de conceptos: ¿cuál es la derivada de la función $f(x, 2) = 8x^2$ evaluada en $x = 3$?

Comprobar

[Mostrar respuesta.]

Sin evaluar a y

Ahora supón que te pido obtener $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, pero sin evaluarla en un punto específico. En otras palabras, debes obtener una nueva función multivariable que tome *cualquier* punto (x, y) como su entrada y diga cuál es la razón de cambio de f cerca de ese punto a medida que nos movemos solamente en la dirección de x.

Puedes empezar del mismo modo, considerando el valor y como una constante. Esta vez, sin embargo, no puedes sustituir un valor constante, como $y = 2$. En lugar de eso, *pretende* que y es constante y toma la derivada.

$$\frac{d}{dx} f(x, y) = \underbrace{\frac{d}{dx}(x^2 y^3)}_{\text{Pretende que } y \text{ es constante}} =$$

O mejor dicho, para enfatizar que esta es una función de varias variables, usamos el símbolo ∂ en vez de d:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y^3) = 2xy^3$$

Para comprobar el resultado, puedes sustituir $(3, 2)$ para ver que se obtiene el mismo resultado que arriba.

> "Entonces, ¿cuál es la diferencia entre $\frac{d}{dx}$ y $\frac{\partial}{\partial x}$? Parece que se usan de la misma manera".

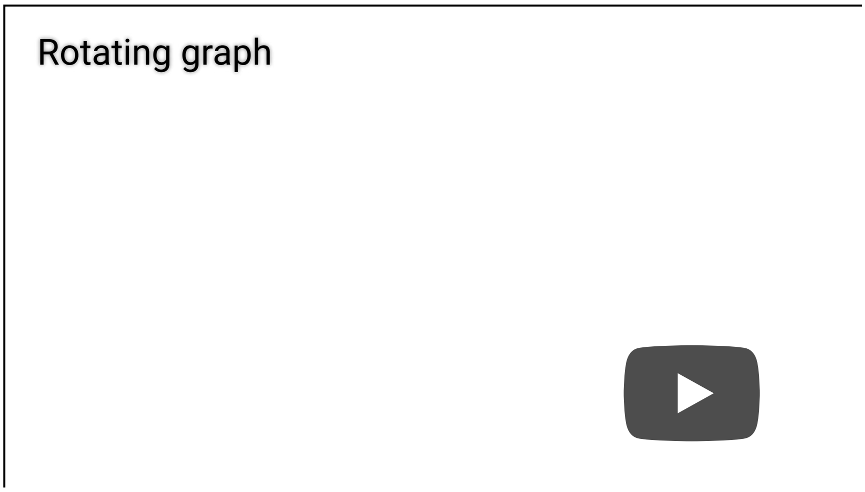
A decir verdad, en realidad no hay una diferencia entre estas operaciones. Podrías ser pedante y decir que una solo está definida para funciones de una sola variable. Pero en cuanto a la intuición y al cálculo, son la misma cosa y la diferencia radica es solo para aclarar qué *tipo* de función está siendo derivada.

Interpretar derivadas parciales con gráficas

Considera esta función:

$$f(x, y) = \frac{1}{5}(x^2 - 2xy) + 3$$

Aquí está un video que muestra su gráfica rotando, para tener una idea de su naturaleza tridimensional.



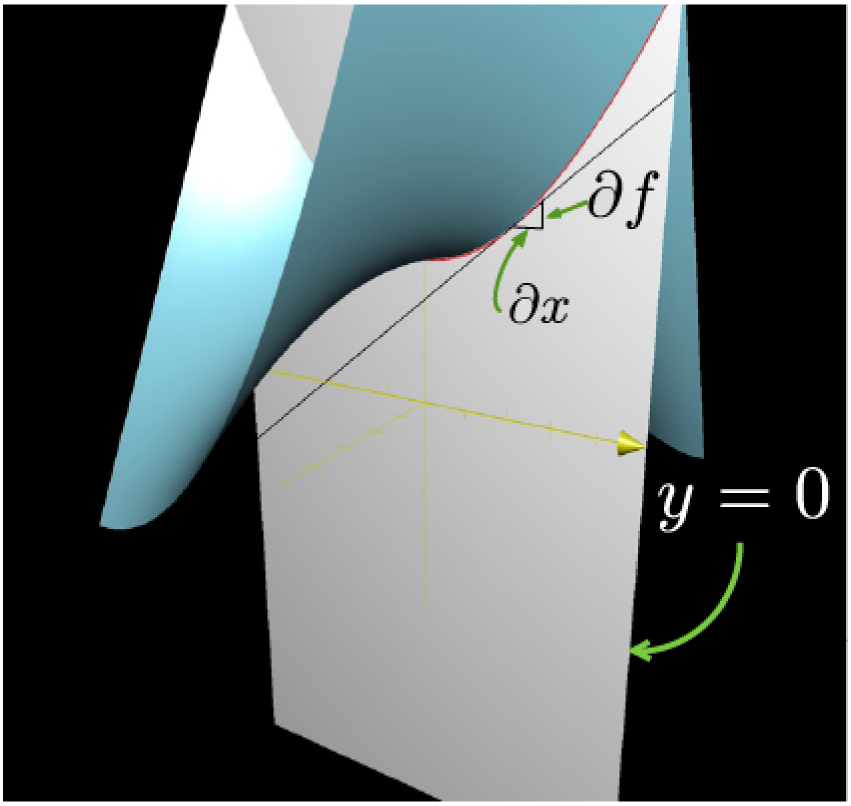
Ahora piensa acerca la derivada parcial de f con respecto a x, tal vez evaluada en el punto $(2, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 0)$$

En términos de la gráfica, ¿qué nos dice el valor de esta expresión acerca del comportamiento de la función f en el punto $(2, 0)$?

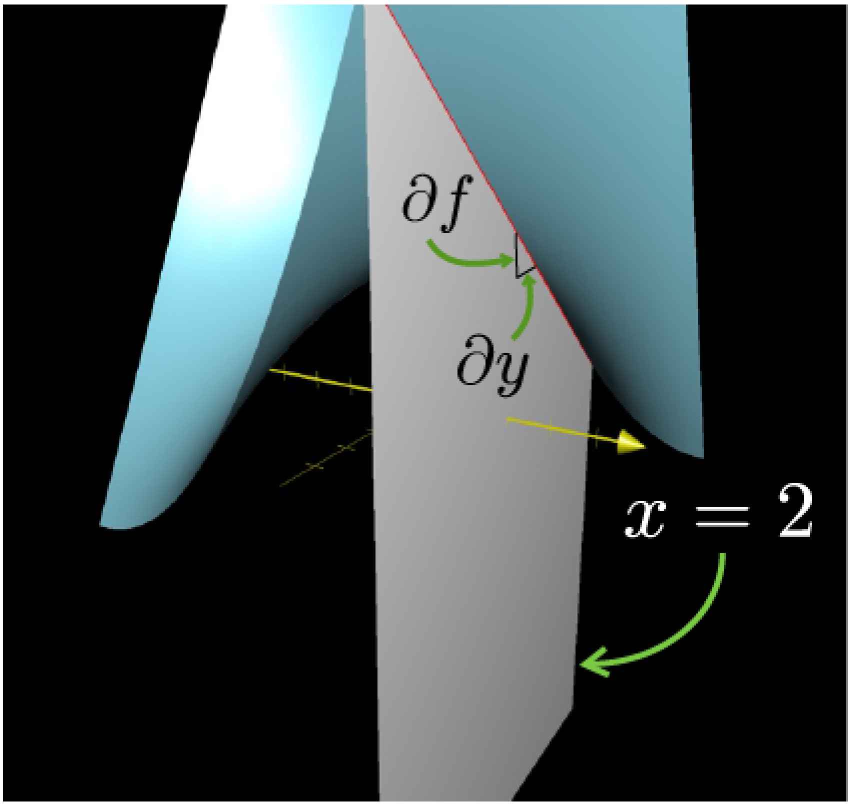
Considera a y como una constante $\rightarrow$ corta la gráfica con un plano

El primer paso es tratar a y como una constante. En específico, si estamos limitándonos a ver lo que sucede en el punto $(2, 0)$, solo deberíamos ver el conjunto de puntos donde $y = 0$. En un espacio tridimensional, este conjunto de puntos conforma un plano perpendicular al eje de y que pasa por el origen.



Este plano $y = 0$, mostrado en blanco, corta la gráfica de $f(x, y)$ a lo largo de una curva parabólica, que se muestra débilmente en rojo. Podemos interpretar que $\frac{\partial f}{\partial x}$ da la pendiente de una recta tangente a esta curva. ¿Por qué? Porque ∂x es un ligero desplazamiento en la dirección de la coordenada x, la dirección horizontal, y ∂f es el cambio resultante en la dirección z, el desplazamiento vertical.

¿Qué sucede con $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el mismo punto $(2, 0)$? Los puntos donde $x = 2$ también forman un plano, pero esta vez es uno perpendicular al eje de x que intercepta al punto $(2, 0)$. Este plano corta la gráfica a lo largo de una nueva curva, y $\frac{\partial f}{\partial y}$ nos dará la pendiente de esa nueva curva.



Pregunta para reflexionar: en la figura de la derecha, la "curva" que corresponde a la intersección de la gráfica de $f(x, y) = \frac{1}{5}(x^2 - 2xy) + 3$ y el plano definido por $x = 2$ parecer que se ve como una línea recta. ¿En verdad es una recta?

Escoge 1 respuesta:

- Sí
- No

Comprobar

[Mostrar respuesta.]

[Una evaluación más profunda de esta derivada parcial]

Frases y notación

Aquí hay algunas frases que podrías llegar a escuchar en referencia a la operación $\frac{\partial f}{\partial x}$:

- "La derivada parcial de f con respecto a x"
- "De f, de x"
- "Parcial de f con respecto a x"
- "La derivada parcial (de f) en la dirección de x"

Notación alternativa

De la misma manera que las personas a veces prefieren escribir f' en vez de $\frac{df}{dx}$, tenemos la siguiente notación:

$$f_x \leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$$
$$f_y \leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}$$
$$f_{\langle \text{alguna variable} \rangle} \leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \langle \text{la misma varial}}$$

Una definición más formal

Aunque pensar acerca de dx o de ∂x como cambios realmente muy pequeños en el valor de x es una idea intuitiva útil, es saludable que ocasionalmente demos un paso atrás y recordemos que definir las cosas de manera precisa requiere introducir límites. Después de todo, ¿cuál valor pequeño específico sería ∂x? ¿Un centésimo? ¿Un millonésimo? ¿$10^{-10^{10}}$?

El punto del cálculo es que no usemos ningún valor pequeño, sino considerar todos los posibles valores y analizar qué sucede cuando estos se acercan a un valor límite. La derivada de una sola variable, por ejemplo, está definida así:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- h representa el "pequeño valor" que intuitivamente pensamos como dx.

- La parte de $h \to 0$ debajo del límite indica que nos importan valores muy pequeños de h, aquellos que tienden a 0.

- $f(x_0 + h) - f(x_0)$ es el cambio del valor de salida que resulta de sumarle h a la entrada, que es lo que pensamos como df.

Definir de manera formal la derivada parcial se ve casi idéntica. Si $f(x, y, \dots)$ es una función con múltiples valores de entrada, así es como se ve:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, \dots) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0,}{}$$

Del mismo modo, así se ve la derivada parcial con respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, \dots) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h,}{}$$

El punto es que h, que representa un pequeño ajuste al valor de entrada, se le suma a diferentes variables de entrada, dependiendo de cual derivada parcial estemos tomando.

A menudo la gente se refiere a esto como la **definición por límite** de una derivada parcial.

Pregunta para reflexionar: ¿cómo podemos pensar acerca de esta definición por límite en el contexto de la interpretación gráfica dada antes? ¿Qué es h? ¿Cómo se ve para $h \to 0$?

Resumen

- Para una función multivariable, como $f(x, y) = x^2 y$, calcular las derivadas parciales se ve algo como esto:

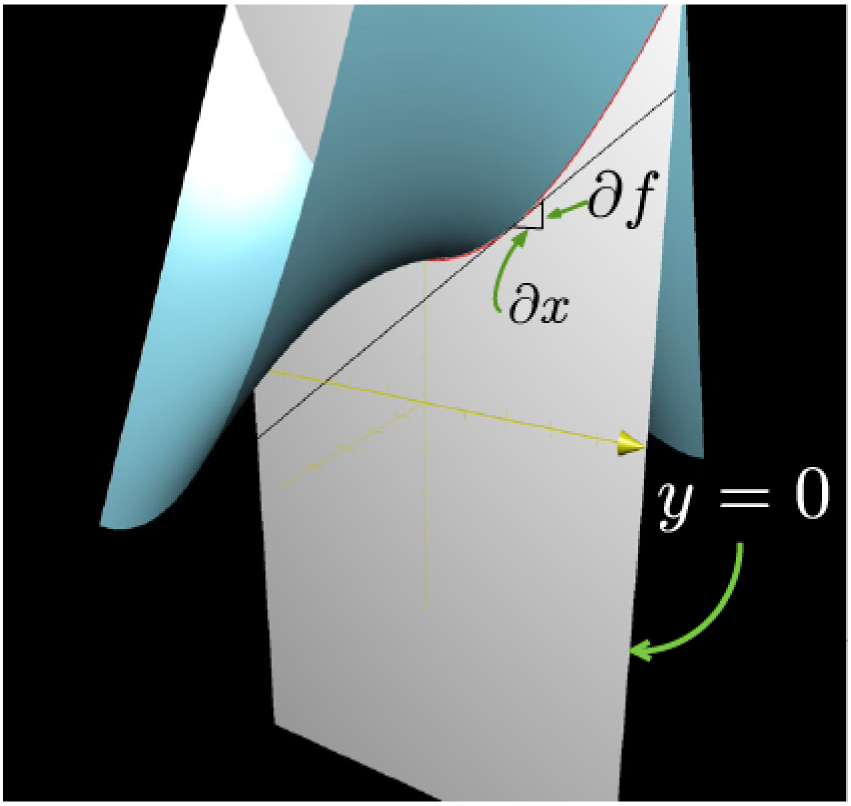
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} x^2 y}_{\substack{\text{Considera a } y \text{ como una constante;} \\ \text{saca la derivada.}}} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} x^2 y}_{\substack{\text{Considera a } x \text{ como una constante;} \\ \text{saca la derivada.}}} = x$$

- El símbolo ∂ con forma de d se utiliza para distinguir las derivadas parciales de las derivadas de una variable. O debo decir... para diferenciarlas.

- La razón de definir un nuevo tipo de derivada es que cuando una función es multivariable, queremos ver cómo cambia la función *al mover una sola variable* mientras mantenemos fijas las demás.

- Con respecto a las gráficas tridimensionales, puedes ver la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ al rebanar la gráfica de f con un plano que representa un valor constante de y y medir la pendiente del corte resultante.



Ordenar por: Más votados

Preguntas Sugerencias y agradecimientos

¿Quieres unirte a la conversación?

Necesitas al menos 5000 puntos de energía para comenzar.

Roberth Josue hace 2 años more

para que sirve una la derivada parcial ? medir una curva pendiente en cualquier punto ?

1 comentario (6 votos) Marca more

TonnyF560 hace 2 años more

Una derivada parcial tiene muchas ventajas respecto al cálculo de una variable. En primera permite analizar espacios vectoriales en R^3 (o sea tres variables). Por ejemplo, la famosa ecuación de estado PV=nRT en donde el volumen, la presión y la temperatura son variables independientes en la que puede haber múltiples maneras de variar la función. EJ.: P(T,V) = nR/V donde n(cantidad de moles) y R(contante de los gases ideales) son constantes, mientas que T(temperatura) y el volumen(V) son cantidades que se pueden variar independientemente. Espero haber resuelto su duda. Saludos y excelente día :)

(4 votos) Marca more

Mariana Raquel Flores Car... hace un año m...

Muy interesante aun que un poco confuso a la hora de explicar, las derivadas tarde o temprano tienen que llegar, gracias por el aporte

(1 voto) Marca more

Sánchez Castañeda Blanc... hace 2 años m...

como resuelvo on problema de diferencial de una funcion cuando varia su volumen

(1 voto) Marca more

TonnyF560 hace 2 años more

¿Tienes el problema?

(0 votos) Marca more

Chris Cova hace un año

more

Cual seria la derivada parcial de primer y segundo orden de la funcion:
F(x,y) = ln[x](y^3+3) + [cos^2(x + y)]/x + x^3y

(0 votos) Marca more

Las derivadas parciales de segundo orden ›